Ρητές καμπύλες

$V(f)$ ρητή, αν $\exists$ $x(t)=\frac{p(t)}{q(t)}$, $y(t)=\frac{r(t)}{q(t)}$

i) $f(x(t),y(t))=0$

ii) για κάθε $(x_0,y_0)\in V(f)$ υπάρχει μοναδικό t_0, τέτοιο ώστε $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ (εκτός πεπερασμένων εξαιρέσεων

Εφαρμογή

1) CAGD

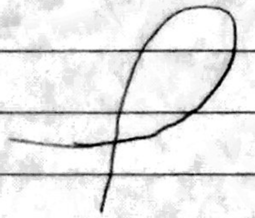
Καμπύλος Bezier

$x(t)=(t-1)^3x_1+3(t-1)^2tx_2+3(t-1)t^2x_3+t^3x_4$

$y(t)=(t-1)^3y_1+3(t-1)^2ty_2+3(t-1)t^2y_3+t^3y_4$

$0\leq t\leq 1$

Αν αφήσω ελεύθερο t θα πάρω την καμπύλη 3ου



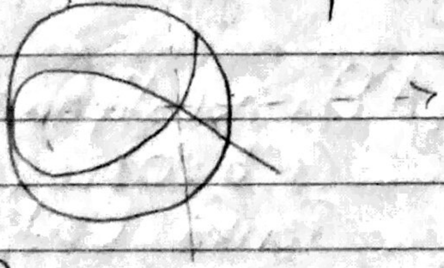
2) Πως βρίσκω τομή καμπυλών

$V(f)\cap V(g)$

$V(x^2+y^2-1)\cap V(y^2-x^3-x^2)$ ← είναι ρητή

$x(t)=t^2-1$

$y(t)=t^3-t$



$x^2+y^2-1=0$

$y^2-x^3-x^2=0 \rightsquigarrow x=t^2-1$

$y=t^3-t$

Άρα, τώρα έχω να λύσω το εξής σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-1=0 \\ x=t^2-1 \\ y=t^3-t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (t^2-1)^2+(t^3-t)^2-1=0 \\ x=t^2-1 \\ y=t^3-t \end{array}$$

(-1,0) διπλό + 4 σημεία

$t^4-2t^2+x+t^6+t^2-2t^4-x=0$

$\circledast\ t^6-t^4-t^2=0$

$t^2(t^4-t^2-1)=0$

$t=0$ (διπλή)

$t^2=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

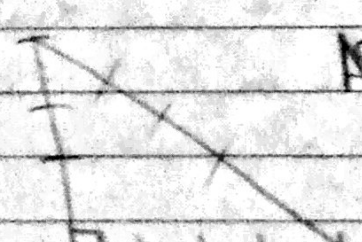
$\rightsquigarrow t=\pm\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$ ← 4 λύσεις

Περίεργο η εξίσωση $\circledast$ να είναι 6ου βαθμού αφού η μία είναι 2ου βαθμού και η άλλη [illegible] 3ου βαθμού. Συνεπώς θα βρω 6 σημεία τομής.

Σχόλιο

3) <u>Πυθαγόρειες τριάδες</u>

(x,y,z) θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε: $x^2+y^2=z^2$
ένα τέτοιο παράδειγμα (πυθαγόρειας τριάδας)
$(3,4,5)$



Άλλη πυθαγόρεια τριάδα
$(6,8,10)$
Γενικά $(3d,4d,5d)$

<u>ορισμός</u>: <u>Πυθαγόρεια Τριάδα</u> (x,y,z) λέγεται <u>αρχική</u> αν
<u>ΜΚΔ$(x,y,z)=1$</u>

(x,y,z) αρχική πυθαγόρεια τριάδα
x,y,z θετικοί ακέραιοι
$x^2+y^2=z^2$ μκδ$(x,y,z)=1$

Θεώρημα (Ευκλείδη)

Όλες οι αρχικές πυθαγόρειες τριάδες με x άρτιο είναι της μορφής $x=2uv$
$$y=u^2-v^2$$
$$z=u^2+v^2$$
όπου $u>v$ u,v θετικοί ακέραιοι
μκδ$(u,v)=1$ και ο ένας από τους u,v είναι άρτιος και ο άλλος περιττός

Παράδειγμα

για $u=4$, $v=3$ από το Θεώρημα Ευκλείδη έχουμε
$x=24$, $y=7$, $z=25$
Άρα μια πυθαγόρεια τριάδα είναι $(24,7,25)$ □

Απόδειξη Θεωρήματος Ευκλείδη

$$(2uv)^2+(u^2-v^2)^2=4u^2v^2+u^4+v^4-2u^2v^2$$
$$=u^4+v^4+2u^2v^2$$
$$=(u^2+v^2)^2$$

Έστω d μκδ(x,y,z) = μκδ$(2uv, u^2-v^2, u^2+v^2)$
$d|2uv$
$\left.\begin{array}{l} d|u^2-v^2 \\ d|u^2+v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d|2u^2 \\ d|2v^2 \\ \text{μκδ}(u^2,v^2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow d=1 \text{ ή } d=2$

Έστω $d=2 \Rightarrow 2|u^2+v^2$
άθροισμα άρτιου και περιττού είναι περιττός. Δηλαδή βγάλαμε ότι το 2 διαιρεί περιττό
Άτοπο.

$d=1 \Rightarrow (2uv,\ u^2+v^2,\ u^2-v^2)$ είναι αρχική πυθαγόρεια τριάδα.

Έστω (X, Y, Z) αρχική Πυθαγόρεια τριάδα.

$\mu\kappa\delta(X, Y, Z)=1$

$\mu\kappa\delta(X,Y)=\mu\kappa\delta(X,Z)=\mu\kappa\delta(Y,Z)=1$

Έστω $d=\mu\kappa\delta(X,Y)>1$ τότε υπάρχει ρ πρώτος τω

$\rho \mid d \Rightarrow \rho \mid X$, $\rho \mid Y$ (το ρ διαιρεί οποιονδήποτε συνδυασμό τους)

$\Rightarrow \rho \mid X\cdot X+Y\cdot Y=Z^2 \underset{\rho \text{ πρώτος}}{\Rightarrow} \rho \mid Z \Rightarrow \rho \mid \mu\kappa\delta(X,Y,Z)=1$

Άτοπο.

συνεχίζεται...

Παρατήρηση

1) X, Y δεν είναι και οι 2 άρτιοι.
2) X, Y δεν είναι και οι 2 περιττοί.

Έστω X, Y περιττοί, τότε έχουμε:

$x=2k+1, \quad y=2\lambda+1$

$x^2+y^2=4k^2+4k+1+4\lambda^2+4\lambda+1=4\mu+2$

$Z^2 \neq$ $\quad X^2+Y^2\equiv 2 \bmod 4$

ενώ $Z^2\equiv 0 \bmod 4$ ή $Z^2\equiv 1 \bmod 4$

□

Συνέχεια αποδείξης

Άρα, ο ένας από τους X, Y είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Έστω X είναι ο άρτιος.

Τι γνωρίζω μέχρι στιγμής: $\mu\kappa\delta(X,Y)=\mu\kappa\delta(X,Z)=\mu\kappa\delta(Y,Z)=1$

$X^2+Y^2=Z^2$, X άρτιος, Y περιττός

$$x=\frac{X}{Z}, \quad y=\frac{Y}{Z} \Rightarrow x^2+y^2=1$$

Από το προηγούμενο μάθημα που βρήκαμε την παραμετρική εξίσωση του κύκλου έχουμε: $x=\dfrac{2t}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

$t\in\mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{Q}$ $\quad t = \frac{y+1}{x} \in \mathbb{Q}$

Το $t = \frac{u}{v}$, όπου u, v θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\mu\kappa\delta(u,v)=1$

$$\frac{X}{Z} = \frac{2\frac{u}{v}}{(\frac{u}{v})^2+1} = \frac{2uv}{u^2+v^2} \Rightarrow X(u^2+v^2) = 2uvZ$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{(\frac{u}{v})^2-1}{(\frac{u}{v})^2+1} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \Rightarrow Y(u^2+v^2) = (u^2-v^2)Z$$

Έχουμε,

$$\left.\begin{array}{l} X(u^2+v^2) = 2uvZ \\ \mu\kappa\delta(X,Z)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow X \mid 2uv$$

$2uv = \omega X$, για κάποιο ω θετικό ακέραιο

Άρα, $X(u^2+v^2) = \omega X Z \Rightarrow \boxed{u^2+v^2 = \omega Z}$ $(*)$

$X \neq 0$ (θετικός)

$$Y(u^2+v^2) = (u^2-v^2)Z \xRightarrow{(*)} Y\omega Z = (u^2-v^2)Z \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y\omega = u^2-v^2$, Z θετικός ακέραιος

Επομένως,

$\omega X = 2uv$

$\omega Y = u^2-v^2$

$\omega Z = u^2+v^2$

προκύπτει ότι

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \omega \mid u^2-v^2 \\ \omega \mid u^2+v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega \mid 2u^2 \\ \omega \mid 2v^2 \end{array} \\ \mu\kappa\delta(u^2,v^2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega \mid 2 \Rightarrow \omega=1 \text{ ή } \omega=2$$

Έστω $\omega=2$.

$2X = 2uv \Rightarrow X = uv$, από υπόθεση X άρτιος $\Rightarrow u$ ή v θα είναι άρτιος, όμως είχα την απαίτηση $\mu\kappa\delta(u,v)=1$

Άρα το ένα από τα u και v άρτιο και το άλλο περιττό

$2Z = u^2+v^2$

(ο ένας άρτιος, τετράγωνο άρτιου άρτιος
ο άλλος περιττός, τετράγωνο περιττού περιττός)

$2Z$: άρτιος, u^2+v^2: περιττός

Άτοπο

Άρα $\omega=1$

Έχουμε Y θετικός. Το $u>v$ και $\mu\kappa\delta(u,v)=1$

και αναγκαστικά ένα από τα u,v είναι άρτιος και ο άλλος περιττός (γιατί αν u,v άρτιοι έχουμε άτοπο, αφού $(\kappa\delta(u,v)=1$
αν u,v περιττοί τότε u^2, v^2 περιττοί $\Rightarrow y = u^2 - v^2$ άρτιος
- Άτοπο)

$\square$

Προβολική Γεωμετρία

Προβολικό επίπεδο

Θέατρο Olympico

Plücker
Moebius

έχω ένα πρόβλημα στον ν-διάστατο χώρο, το κοιτάζουμε στον ν+1 διάστατο χώρο

$\boxed{z=1}$

$ax+by+\gamma_1 z=0$

$ax+by+\gamma_2 z=0$

$ax+by+\gamma_3 z=0$

$ax+by+\gamma_4 z=0$

$(x_0 t, y_0 t, t)$

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+\gamma_1 z=0 \\ ax+by+\gamma_2 z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{(\gamma_2-\gamma_1)}_{\neq 0} z=0 \Rightarrow \boxed{z=0}$$

αφού είναι διαφορετικές ευθείες

$ax+by=0$

Γενικό

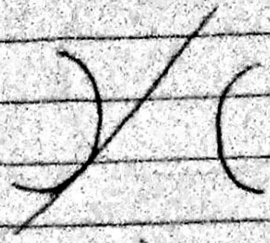
$x=bt$ $\quad (bt, -at, 0)$

$y=-at$ $\quad (b, -a, 0)$

$z=t$ $\quad (2017b, -2017a, 0)$

ομογενείς εξισώσεις είναι εκείνοι που διέρχονται από την ίδια ευθεία.

$$3x-5y+z=0$$



$$3x-5y+7z=0$$

$z=0$ $(5,3,0)$ το σημείο στο ∞

$(5\sqrt{2},3\sqrt{2},0)$ Δεν είναι μοναδική η γραφή.

Έχω την υπερβολή $x^2-y^2+7=0$ και ψάχνω τα σημεία στο ∞. Θα πάω στον τρισδιάστατο χώρο. Θέλω ομογενή γιατί αν βρω ένα σημείο θα έχω και τα πολλαπλάσια του συγκεκριμένου σημείου. Από την στιγμή που έχω ένα σημείο θέλω όλη την ευθεία.

$$x^2-y^2+7z^2=0$$

αν έχω (x_0,y_0,z_0)

θα έχω $(\lambda x_0,\lambda y_0,\lambda z_0)$

$x^2-y^2=0$, $z=0$ $\Rightarrow$ $(x-y)(x+y)=0$, $z=0$

$x-y=0$, $z=0$: $(1,1,0)$

$x+y=0$, $z=0$: $(1,-1,0)$

αντιστοιχούν στις κλίσεις των ευθειών που είναι στις ασύμπτωτες //

τα 2 σημεία της υπερβολής στο ∞ □

$y-x^2=0$ ψάχνω τα σημεία στο άπειρο

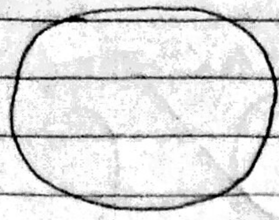
$$\left.\begin{aligned} yz-x^2&=0\\ z&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2=0$$

Έχει ένα διπλό σημείο στο άπειρο $(0,1,0)$

(x_0,y_0,z_0) Θέλω να δείξω το t

(tx_0,ty_0,tz_0) οπότε θα πρέπει να είναι κοινός παράγοντας σε κάθε μονώνυμο. □

$x^2+y^2-1=0$



ομογενοποιώ την $x^2+y^2-1=0$ βάζοντας την μεταβλητή z, αλλά όταν βάλω $z=1$ θέλω να πάρω την αρχική

SOS!

$x^2+y^2-z^2=0$

$z=0$

$(x+iy)(x-iy)=0$

$x+iy=0$	$x-iy=0$
$z=0$	$z=0$
$(1,i,0)$	$(i,1,0)$

Οι κύκλοι έχουν ακριβώς τα ίδια σημεία στο άπειρο. Ενώ οι ελλείψεις, οι υπερβολές και οι παραβολές έχουν διαφορετικά.

θετικό κομμάτι

εξαρτάται από ασύμπτωτες

που κοιτάζει

Προσοχή!

Αν πάρω τώρα τον κύκλο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0$

Βάζω z για να την κάνω ομογενή

$(x-x_0 z)^2+(y-y_0 z)^2-r^2z^2=0$

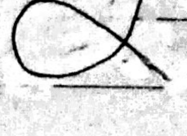
Βάζω $z=0$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (i,1,0) \\ (1,i,0) \end{array}$$

□

$y^2-x^3-x^2=0$ (3ου βαθμού)

$z=1$



προβολική καμπύλη

$y^2z-x^3-x^2z=0$

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ x^3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ έχει τριπλό σημείο $(0,1,0)$

□